2

Métodos de demostración

2.1 DEMOSTRACIÓN POR RAZONAMIENTO DEDUCTIVO

2.1A El razonamiento deductivo es una demostración

El razonamiento deductivo permite obtener conclusiones verdaderas o aceptablemente verdaderas a partir de proposiciones que también lo son, o que son aceptadas como tales. El método consiste de los siguientes tres pasos:

1. Enunciación de una *proposición general* referente a todo un conjunto o clase de objetos; por ejemplo, la clase de perros: *Todos los perros son cuadrúpedos* (*tienen cuatro patas*).
2. Enunciación de una *proposición particular* sobre uno o algunos de los miembros del conjunto o clase, a los que se hace referencia en la proposición general: *Todos los galgos son perros*.
3. Inferencia de una *deducción* que sea consecuencia lógica de la aplicación de la proposición general sobre la particular: *Todos los galgos son cuadrúpedos*.

Al razonamiento deductivo se le denota como *razonamiento silogístico*; ya que las tres proposiciones en conjunto hacen un silogismo. En un silogismo, la proposición general se llama premisa mayor, la proposición particular es la premisa menor; mientras que la deducción es la conclusión. Así, en el silogismo anterior:

1. La premisa mayor es: *todos los perros son cuadrúpedos*.
2. La premisa menor es: *todos los galgos son perros*.
3. La conclusión es: *todos los galgos son cuadrúpedos*.

Fig. 2-1

El empleo de un círculo como en la figura 2-1 para representar cada conjunto o clase, le ayudará a entender las relaciones comprendidas en el razonamiento deductivo.

1. Dado que la premisa mayor o proposición general establece que todos los perros son cuadrúpedos, el círculo que representa a los perros debe estar contenido en el de los cuadrúpedos.

2. Supuesto que la premisa menor o proposición particular establece que todos los galgos son perros, el círculo que representa a los galgos debe estar contenido en el de los perros.

3. La conclusión es obvia. Dado que el círculo de los galgos debe estar dentro del círculo de los cuadrúpedos, la única conclusión posible es que los galgos son cuadrúpedos.

2.1B La observación, la medida y la experimentación no son una demostración

La *observación no puede utilizarse como prueba*. La vista puede ser defectuosa; como es el caso de una persona que padezca de astigmatismo. Las apariencias pueden ser engañosas. Así, en cada parte de la figura 2-2, AB no parece ser igual a CD; aunque efectivamente lo es.

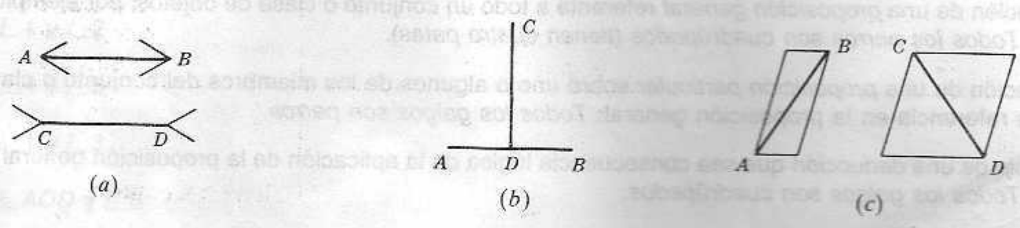


Fig. 2-2

La *medición no puede utilizarse como prueba*. La medición sólo es aplicable al número limitado de casos. La conclusión que suministra no es exacta sino aproximada; ello depende de la precisión del instrumento de medición y de la habilidad del observador. En la medida debe considerarse la posibilidad de un error; igual a la mitad de la unidad más pequeña empleada en el instrumento. Así, si se está midiendo un ángulo hasta el grado más cercano, debe aceptarse una tolerancia de la mitad de un grado.

La *experimentación no puede utilizarse como prueba*. Sus conclusiones son sólo una probabilidad que depende de la circunstancia o situación particulares, examinadas durante el proceso de experimentación. Así, es probable que un par de dados estén cargados si en diez experiencias consecutivas se obtienen 20 sietes; esta probabilidad aumenta si se obtiene el mismo resultado en veinte experiencias sucesivas; sin embargo, estas probabilidades por muy altas que sean no representan certeza.

PROBLEMAS RESUELTOS

2.1 UTILÍCENSE CÍRCULOS PARA DETERMINAR RELACIONES DE GRUPO

De (*a*) a (*e*), cada letra tal como A, B y R representa un conjunto o grupo. Complétese cada proposición empleando círculos para representar estos conjuntos o grupos.

(*a*) Si A es B y B es C, entonces __?__.

(*b*) Si A es B y B es E y E es R, entonces __?__.

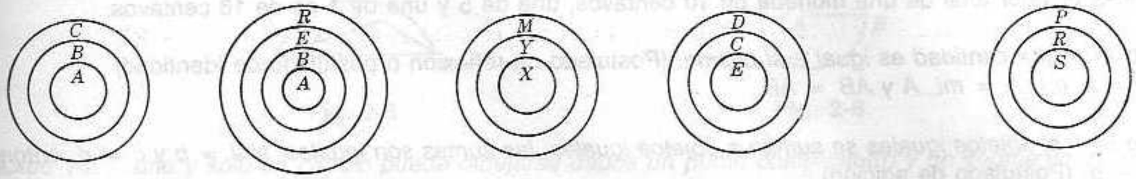
(*c*) Si X es Y y __?__, entonces X es M.

(*d*) Si *C* es *D* y *E* es *C*, entonces _?_.

(*e*) Si los cuadrados (*S*) son rectángulos (*R*) y los rectángulos son paralelogramos (*P*), entonces _?_.

Respuestas

(*a*) *A* es *C* (*b*) *A* es *R* (*c*) *Y* es *M* (*d*) *E* es *D* (*e*) los cuadrados son paralelogramos



2.2 COMPLEMENTACIÓN DE UN SILOGISMO

Escriba la proposición adecuada para completar cada silogismo:

Premisa mayor (proposición general)	**Premisa menor** (proposición particular)	**Conclusión** (proposición deducida)
(*a*) Un gato es un animal doméstico.	Minino es un gato.	_?_
(*b*) Todos los hombres deben morir.	_?_	Juan debe morir.
(*c*) Los ángulos verticales son congruentes.	$\angle c$ y $\angle d$ son ángulos verticales.	_?_
(*d*) _?_	Un cuadrado es un rectángulo.	Un cuadrado tiene diagonales congruentes.
(*e*) Un triángulo obtuso tiene sólo un ángulo obtuso.	_?_	$\triangle ABC$ tiene sólo un ángulo obtuso.

Respuestas

(*a*) Minino es un animal doméstico.

(*b*) Juan es un hombre.

(*c*) $\angle c \cong \angle d$.

(*d*) Un rectángulo tiene diagonales congruentes.

(*e*) $\triangle ABC$ es un triángulo obtuso.

2.2 POSTULADOS (HIPÓTESIS)

Toda la estructura de demostración en geometría descansa sobre, o comienza con, algunas proposiciones generales no demostradas, llamadas *postulados*. Es necesario suponer o aceptar que estas proposiciones son verdaderas, y así deducir o demostrar otras proposiciones.

2.2A Postulados algebraicos

POSTULADO 1: *objetos iguales a sí mismos o a otros objetos iguales son iguales entre sí; si $a = b$ y $c = b$ entonces $a = c$.* (Postulado transitivo)

Por consiguiente, el valor total de una moneda de 10 centavos es igual al valor de dos monedas de cinco centavos, ya que en ambos casos se tiene el valor de diez centavos.

Postulado 2: *una cantidad puede sustituirse por su equivalente en cualquier expresión o ecuación*. (Postulado de sustitución)

Así, si $x = 5$ y $y = x + 3$, podemos sustituir 5 donde aparece x y encontrar que $y = 5 + 3 = 8$.

Postulado 3: *el total es igual a la suma de sus partes*. (Postulado de partición)

Entonces el valor total de una moneda de 10 centavos, una de 5 y una de 1 es de 16 centavos.

Postulado 4: *una cantidad es igual a sí misma*. (Postulado de reflexión o postulado de identidad)

Así $x = x$, $m\angle A = m\angle A$ y $AB = AB$.

Postulado 5: *si objetos iguales se suman a objetos iguales, las sumas son iguales; si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$*. (Postulado de adición)

Si	7 monedas de 10₵ = 70₵	Si	$x + y = 12$
y	2 monedas de 10₵ = 20₵	y	$x - y = 8$
entonces	9 monedas de 10₵ = 90₵	entonces	$2x = 20$

Postulado 6: *si objetos iguales se restan de objetos iguales, sus diferencias son iguales; si $a = b$ y $c = d$, entonces $a - c = b - d$*. (Postulado de sustracción)

Si	7 monedas de 10₵ = 70₵	Si	$x + y = 12$
y	2 monedas de 10₵ = 20₵	y	$x - y = 8$
entonces	5 monedas de 10₵ = 50₵	entonces	$2y = 4$

Postulado 7: *si objetos iguales se multiplican por objetos iguales, sus productos son iguales; si $a = b$ y $c = d$, entonces $ac = bd$*. (Postulado de la multiplicación)

Así pues, si el precio de un libro es de \$2, el precio de tres libros es \$6.

Axioma especial de la multiplicación: los duplicados de cantidades iguales, son iguales.

Postulado 8: *si objetos iguales son divididos por objetos iguales, los cocientes son iguales, si $a = b$ y $c = d$, entonces $a/c = b/d$, donde $c, d \neq 0$*. (Postulado de la división)

Por consiguiente, si el precio de 1 lb de mantequilla cuesta 80₵, entonces para la misma tasa, el precio de ¼ de lb es de 20₵.

Postulado 9: *cantidades iguales elevadas a potencias iguales son iguales; si $a = b$, entonces $a^n = b^n$*. (Postulado de la potencia)

Así, si $x = 5$ entonces $x^2 = 5^2$ o $x^2 = 25$.

Postulado 10: *raíces iguales de cantidades iguales son iguales; si $a = b$ entonces $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$*.

Por eso, si $y^3 = 27$, entonces $y = \sqrt[3]{27} = 3$.

2.2B Postulados geométricos

Postulado 11: *entre dos puntos cualesquiera, puede trazarse una y sólo una línea recta.*

Por lo tanto, $\overleftrightarrow{AB}$ es la única línea que puede ser trazada entre los puntos A y B en la figura 2-3.

Fig. 2-3

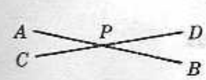


Fig. 2-4

POSTULADO 12: *dos líneas se intersectan en uno y sólo un punto.*

Entonces, P es el único punto de intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ en la figura 2-4.

POSTULADO 13: *la longitud de un segmento es la distancia más corta entre dos puntos.*

Así $\overline{AB}$ es más corta que las líneas curva y quebrada entre los puntos A y B en la figura 2-5.

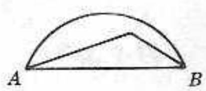


Fig. 2-5

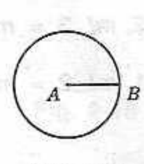


Fig. 2-6

POSTULADO 14: *uno y sólo un círculo puede dibujarse dados un punto como centro y un segmento de línea como radio.*

De modo que sólo el círculo A en la figura 2-6 puede dibujarse con A como centro y $\overline{AB}$ como radio.

POSTULADO 15: *cualquier figura geométrica puede cambiarse de lugar sin modificar su forma o su tamaño.*

Así $\triangle$I en la figura 2-7 puede cambiarse a otra posición sin modificar su tamaño o su forma.

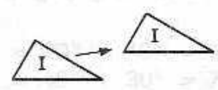


Fig. 2-7

Fig. 2-8

POSTULADO 16: *un segmento tiene uno y sólo un punto medio.*

Por lo tanto M es el único punto medio de $\overline{AB}$ en la figura 2-8.

POSTULADO 17: *un ángulo tiene una y sólo una bisectriz.*

Por eso, sólo $\overrightarrow{AD}$ es la bisectriz de $\angle A$ en la figura 2-9.

POSTULADO 18: *a través de cualquier punto de una línea puede lanzarse una y sólo una perpendicular a ella.*

Así, sólo existe $\overrightarrow{PC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ en el punto P de $\overleftrightarrow{AB}$. (Fig. 2-10)

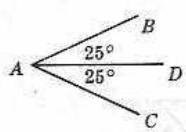


Fig. 2-9

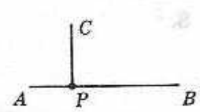


Fig. 2-10

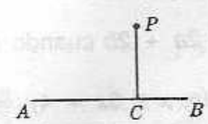


Fig. 2-11

POSTULADO 19: *a través de cualquier punto fuera de una línea puede trazarse una y sólo una perpendicular a esa línea.*

Sólo $\overline{PC}$ puede trazarse $\perp \overleftrightarrow{AB}$ desde el punto P afuera de $\overleftrightarrow{AB}$ en la figura 2-11.

PROBLEMAS RESUELTOS

2.3 APLICACIÓN DEL POSTULADO 1

En cada caso, ¿qué conclusión se obtiene de la aplicación del postulado 1, a la información contenida en las figuras 2-12 y 2-13?

(*a*) Dado: $a = 10$, $b = 10$, $c = 10$

(*b*) Dado: $a = 25$, $a = c$

(*c*) Dado: $a = b$, $c = b$

(*d*) Dado: $m\angle 1 = 40°$, $m\angle 2 = 40°$, $m\angle 3 = 40°$

(*e*) Dado: $m\angle 1 = m\angle 2$, $m\angle 3 = m\angle 1$

(*f*) Dado: $m\angle 3 = m\angle 1$, $m\angle 2 = m\angle 3$

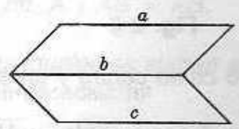


Fig. 2-12

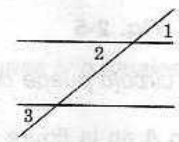


Fig. 2-13

Respuestas

(*a*) Dado que a, b y c son iguales a 10, $a = b = c$.

(*b*) Dado que c y 25 son iguales a a, $c = 25$.

(*c*) Dado que a y c son iguales a b, $a = c$.

(*d*) Dado que $\angle 1$, $\angle 2$ y $\angle 3$ cada uno mide 40°, $\angle 1 \cong \angle 2 \cong 3$.

(*e*) Dado que $\angle 2$ y $\angle 3$ cada uno es $\cong \angle 1$, $\angle 2 \cong \angle 3$.

(*f*) Dado que $\angle 1$ y $\angle 2$ cada uno es $\cong \angle 3$, $\angle 1 \cong \angle 2$.

2.4 Aplicación del Postulado 2

En cada caso, ¿qué conclusión se obtiene cuando se aplica el postulado 2 a la información proporcionada?

(*a*) Calcule $2a + 2b$ cuando $a = 4$ y $b = 8$.

(*b*) Encuentre x si $3x + 4y = 35$ y $y = 5$.

(*c*) Dado $m\angle 1 + m\angle B + m\angle 2 = 180°$, $\angle 1 \cong \angle A$ y $\angle 2 \cong \angle C$ en la figura 2-14.

Respuestas

(*a*) Sustituya 4 por a y 8 por b:

$$2a + 2b$$
$$2(4) + 2(8)$$

Resp. $8 + 16 = 24$

(*b*) Sustituya 5 por y:

$$3x + 4y = 35$$
$$3x + 4(5) = 35$$
$$3x + 20 = 35$$

Resp. $3x = 15, \quad x = 5$

(*c*) Sustituya $\angle A$ por $\angle 1$ y $\angle C$ por $\angle 2$:

$$m\angle 1 + m\angle B + m\angle 2 = 180°$$

Resp. $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$

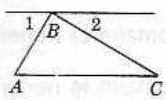


Fig. 2-14

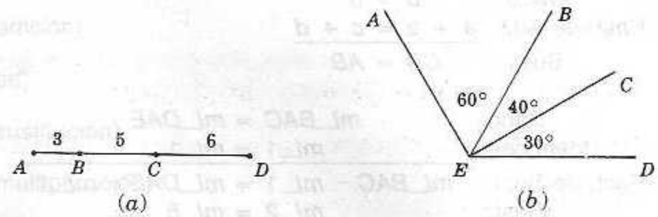


Fig. 2-15

2.5 Aplicación del Postulado 3

Establezca las conclusiones que siguen a la aplicación del postulado 3 a los datos de (*a*) la figura 2-15(*a*), (*b*) la figura 2-15(*b*).

Respuestas

(*a*) $AC = 3 + 5 = 8$
$BD = 6 + 5 = 11$
$AD = 3 + 5 + 6 = 14$

(*b*) $m\angle AEC = 60^\circ + 40^\circ = 100^\circ$
$m\angle BED = 40^\circ + 30^\circ = 70^\circ$
$m\angle AED = 60^\circ + 40^\circ + 30^\circ = 130^\circ$

2.6 Aplicación de los Postulados 4, 5 y 6

En cada caso establecer una conclusión que resulte de la aplicación de los postulados 4, 5 y 6 en los datos que se dan a continuación:

(*a*) Dado: $a = e$ (Fig. 2-16).

(*b*) Dados: $a = c$, $b = d$ (Fig. 2-16).

(*c*) Dado: $m\angle BAC = m\angle DAE$ (Fig. 2-17).

(*d*) Dados: $m\angle BAC = m\angle BCA$, $m\angle 1 = m\angle 3$ (Fig. 2-17).

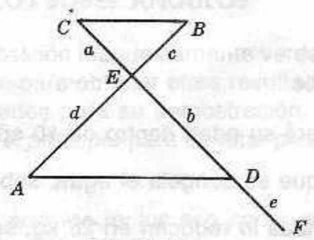


Fig. 2-16

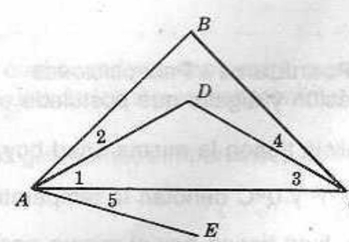


Fig. 2-17

Respuestas

(*a*)

Dado:	$a = e$
Identidad:	$b = b$
Post. de Ad.:	$a + b = e + b$
Sust.:	$CD = EF$

(*b*)
Dado: $a = c$
Dado: $b = d$
Post. de Ad.: $a + b = c + d$
Sust.: $CD = AB$

(*c*)
Dado: $m\angle BAC = m\angle DAE$
Identidad: $m\angle 1 = m\angle 1$
Post. de Sust.: $m\angle BAC - m\angle 1 = m\angle DAE - m\angle 1$
Sust.: $m\angle 2 = m\angle 5$

(*d*)
Dado: $m\angle BAC = m\angle BCA$
Dado: $m\angle 1 = m\angle 3$
Post. de Sust.: $m\angle BAC - m\angle 1 = m\angle BCA - m\angle 3$
Sust.: $m\angle 2 = m\angle 4$

2.7 Aplicación de los Postulados 7 y 8

Establecer las conclusiones que se obtienen cuando se aplican los axiomas de la multiplicación y de la división, a la información contenida en la (*a*) figura 2-18 y (*b*) figura 2-19.

Dados: $a = b$
$\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son trisectados

Dados: $m\angle A = m\angle C$
$m\angle = \frac{1}{2}m\angle A$
$m\angle 2 = \frac{1}{2}m\angle C$

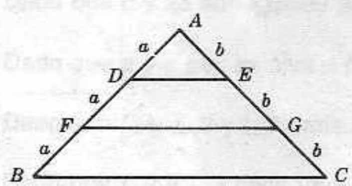


Fig. 2-18

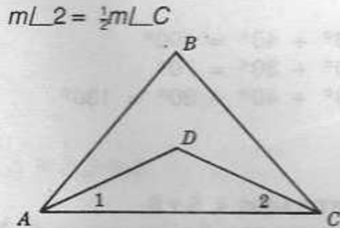


Fig. 2-19

Respuestas

(*a*) Si $a = b$, entonces $2a = 2b$ ya que la duplicación de iguales da como resultado una igualdad, en consecuencia $AF = DB = AG = EC$. También $3a = 3b$ y aplicando el postulado de la multiplicación se tiene que $AB = AC$.

(*b*) Si $m\angle A = m\angle C$, entonces $\frac{1}{2}m\angle A = \frac{1}{2}m\angle C$ ya que mitades de iguales son iguales. Por lo tanto, $m\angle 1 = m\angle 2$.

2.8 Aplicación de los Postulados a Proposiciones

Complétese cada oración y dígase qué postulado es aplicable.

(*a*) Si Harry y Alicia tienen la misma edad hoy, ¿cuál será su edad dentro de 10 años __?__.

(*b*) Dado que 32°F y 0°C denotan la temperatura a la que se congela el agua, sabemos que __?__.

(*c*) Si Enrique y Juan tienen hoy el mismo peso y si ambos lo reducen en 20 kg, se tiene que __?__.

(*d*) Si dos acciones que cuestan lo mismo, triplican su valor, entonces __?__.

(*e*) Si dos listones de igual tamaño se cortan en cinco partes iguales, entonces __?__.

(*f*) Si Agnes y Joan tienen la misma altura que Ann, entonces __?__.

(*g*) Si dos aparatos acondicionadores de ambiente del mismo precio tienen un descuento del 10%, entonces __?__.

Respuestas

(*a*) Tienen la misma edad. (Post. de adición)

(*b*) 32°F = 0°C. (Post. de transitividad)

(*c*) Tienen el mismo peso. (Post. de sustitución)

(*d*) Tienen el mismo valor. (Post. de multiplicación)

(*e*) Sus partes son del mismo tamaño. (Post. de la división)

(*f*) Joan y Agnes tienen la misma altura. (Post. de transitividad)

(*g*) Tienen el mismo precio. (Post. de sustitución)

2.9 Aplicación de Postulados Geométricos

Diga con qué postulado se corrige la proposición y diagrama asociados en la figura 2-20.

(*a*) $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AE}$ bisectan a $\angle A$.
(*b*) $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{CE} \perp \overleftrightarrow{AB}$
(*c*) Ambos círculos tienen a O como centro y tienen el mismo radio.
(*d*) $AB + BC = AC$

Fig. 2-20

Respuestas

(*a*) Postulado 17. (*b*) Postulado 18. (*c*) Postulado 14. (*d*) Postulado 13. (AC es menor o igual que la suma de AB y BC.)

2.3 TEOREMAS BÁSICOS SOBRE ÁNGULOS

Un *teorema* es una proposición (supuestamente verdadera), la cual cuando se demuestra, puede utilizarse para demostrar otras proposiciones o para obtener otros resultados. Cada uno de los siguientes teoremas fundamentales requiere de definiciones y postulados para su demostración.

Nota: se utilizará el *principio* para denotar proposiciones geométricas importantes, tales como: teoremas, postulados y definiciones.

PRINCIPIO 1: *todos los ángulos rectos son congruentes.*
Así, en la figura 2-21 $\angle A \cong \angle B$

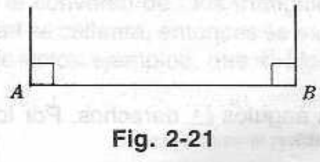


Fig. 2-21

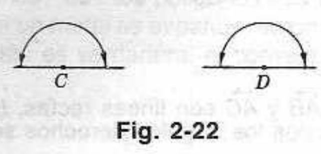


Fig. 2-22

PRINCIPIO 2: *todos los ángulos derechos son congruentes.*
Así, en la figura 2-22 $\angle A \cong \angle D$.

PRINCIPIO 3: *los complementos de ángulos iguales o congruentes son congruentes.*
Éste es una combinación de los siguientes principios:

1. Los *complementos de ángulos iguales son congruentes*. Así en la figura 2-23 $\angle a \cong \angle b$, cada uno es el complemento de $\angle x$.

2. Los *complementos de ángulos congruentes son congruentes.* Así en la figura 2-24 $\angle c \cong \angle d$; sus complementos son los ángulos congruentes $\angle$s x y y.

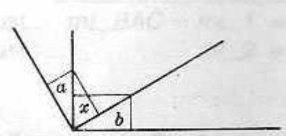


Fig.2-23

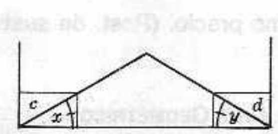


Fig. 2-24

PRINCIPIO 4: *los suplementos de ángulos iguales o congruentes son congruentes.*
Éste es una combinación de los siguientes principios:

1. Los *suplementos de ángulos iguales son congruentes.* En la figura 2-25 $\angle a \cong \angle b$; cada uno es el suplemento de $\angle x$.

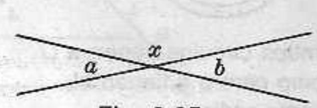


Fig. 2-25

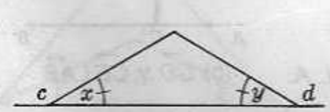


Fig.2-26

2. Los *suplementos de ángulos congruentes son congruentes*. Entonces en la figura 2-26 $\angle c \cong \angle d$; sus suplementos son los ángulos congruentes x y y.

PRINCIPIO 5: *los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.*
Así en la figura 2-27, $\angle a \cong \angle b$; esto es consecuencia del principio 4, dado que $\angle a$ y $\angle b$ son ángulos suplementarios del mismo $\angle c$.

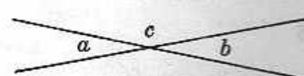


Fig. 2-27

PROBLEMAS RESUELTOS

2.10 APLICACIÓN DE LOS TEOREMAS BÁSICOS: PRINCIPIOS 1 A 5

Para cada inciso de la figura 2-28 indique cuál es el teorema básico sobre ángulos que se requiere para establecer $\angle a \cong \angle b$.

Respuestas

(*a*) Dado que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son líneas rectas, $\angle a$ y $\angle b$ son ángulos $\angle$s derechos. Por lo tanto $\angle a \cong \angle b$.
Resp. Todos los ángulos derechos son congruentes.

(*a*) **Dados:** $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son líneas rectas.

(*b*) **Dados:** $\overline{BA} \perp \overline{AD}$, $\overline{BC} \perp \overline{CD}$

(*c*) **Dados:** $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\angle a$ comp. $\angle 1$

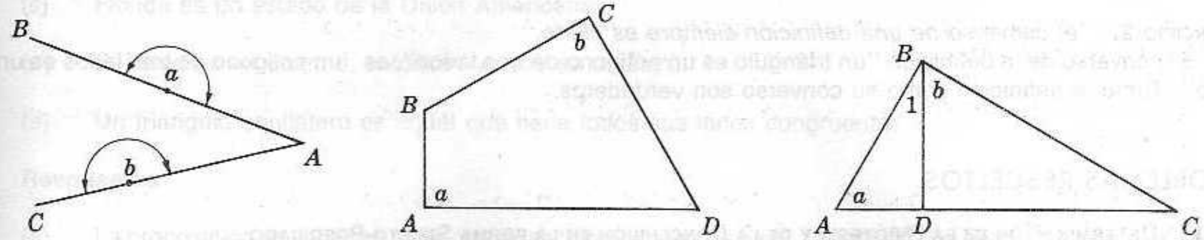


Fig. 2-28

(*b*) Dados $BA \perp AD$ y $BC \perp CD$, $\angle a$ y $\angle b$ son $\angle^s$ rectos. Por lo tanto, $\angle a \cong \angle b$.
Resp. Todos los ángulos rectos son congruentes.

(*c*) Dado $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\angle B$ es $\angle$ recto, entonces $\angle b$ es el complemento de $\angle 1$. Por lo tanto; dado que $\angle a$ es el complemento de $\angle 1$, $\angle a \cong \angle b$.
Resp. Los complementos del mismo ángulo son congruentes.

2.4 DETERMINACIÓN DE LA HIPÓTESIS Y LA CONCLUSIÓN

2.4A Formas proposicionales: forma sujeto-predicado y forma si-entonces

Las proposiciones "Un metal al calentarse se expande" y "Si un metal se calienta, entonces se expande", son dos formas de la misma idea. En la tabla siguiente, se muestra cómo dividir una forma en sus dos partes fundamentales, la *hipótesis*, que establece lo que *está dado*; y la *conclusión*, que indica *lo que es necesario demostrar*. Nótese que en la forma si-entonces, la palabra *entonces* puede omitirse.

Forma	Hipótesis (lo que está dado)	Conclusión (por demostrar)
Sujeto-predicado: *Un metal al calentarse se expande.*	**La hipótesis es el sujeto:** *Un metal al calentarse*	**La conclusión es el predicado:** *se expande.*
Si-entonces:	**La hipótesis es la proposición si:**	**La conclusión es la proposición entonces:**
Si un metal se calienta, entonces se expande.	*Si un metal se calienta*	*entonces se expande.*

2.4B El converso de una proposición*

El converso de una proposición se forma mediante el intercambio de la hipótesis por la conclusión. Entonces, para formar el converso de una proposición si-entonces, se intercambian las proposiciones si y entonces. En el caso de la forma sujeto-predicado, el intercambio es entre el sujeto y el predicado.

Por consiguiente, el converso de "los triángulos son polígonos" es "los polígonos son triángulos". También, el converso de "si un metal se calienta, entonces se expande" es "si un metal se expande, entonces se está calentando". Nótese en cada uno de estos ejemplos, que si bien la proposición es verdadera, el converso no necesariamente es cierto.

(*) N.T. Algunos autores denotan el converso como el recíproco.

Principio 1: *el converso de una proposición cierta no necesariamente es verdadero.*
Así, la proposición "los triángulos son polígonos" es cierta. Su converso no necesariamente es verdadero.

Principio 2: *el converso de una definición siempre es cierto.*
El converso de la definición "un triángulo es un polígono de tres lados", es "un polígono de tres lados es un triángulo". Tanto la definición como su converso son verdaderos.

PROBLEMAS RESUELTOS

2.11 Determinación de la Hipótesis y de la Conclusión en la forma Sujeto-Predicado

Determine cuál es la hipótesis y la conclusión en cada una de las proposiciones siguientes.

Proposiciones	Respuestas	
	Hipótesis (sujeto)	**Conclusión** (predicado)
(*a*) Las perpendiculares forman ángulos rectos.	Las perpendiculares	forman ángulos rectos
(*b*) Los complementos del mismo ángulo son congruentes.	Los complementos del mismo ángulo	son congruentes
(*c*) Un triángulo equilátero es equiangular.	Un triángulo equilátero	es equiangular
(*d*) Un triángulo rectángulo tiene sólo un ángulo recto.	Un triángulo rectángulo	tiene sólo un ángulo recto
(*e*) Un triángulo no es un cuadrilátero.	Un triángulo	no es un cuadrilátero
(*f*) Un extranjero no tiene derecho al voto.	Un extranjero	no tiene derecho al voto

2.12 Determinación de la Hipótesis y la Conclusión en la Forma Si-Entonces

Determine la hipótesis y la conclusión de cada una de las proposiciones siguientes.

Proposiciones	Respuestas	
	Hipótesis (condición si)	**Conclusión** (entonces)
(*a*) Si una línea bisecta un ángulo, entonces lo divide en dos partes congruentes.	Si una línea bisecta un ángulo	entonces divide al ángulo en dos partes congruentes.
(*b*) Un triángulo tiene un ángulo obtuso si es un triángulo obtuso.	Si es un triángulo obtuso	(entonces) un triángulo tiene un ángulo obtuso.
(*c*) Si un estudiante está enfermo, no debe ir a la escuela.	Si un estudiante está enfermo	(entonces) no debe ir a la escuela.
(*d*) Un estudiante, si desea aprobar debe estudiar con regularidad.	Si desea aprobar	(entonces) debe un estudiante estudiar con regularidad.

2.13 Formación de Conversos y Determinacion de su Veracidad

Establezca si las siguientes proposiciones son verdaderas. Después construya su converso y determine si es necesariamente cierto.

(*a*) Un cuadrilátero es un polígono.

(*b*) Un ángulo obtuso tiene mayor tamaño que un ángulo recto.

(*c*) Florida es un estado de la Unión Americana.

(*d*) Si usted es mi alumno, entonces yo soy su maestro.

(*e*) Un triángulo equilátero es aquél que tiene todos sus lados congruentes.

Respuestas

(*a*) La proposición es verdadera. Su converso "un polígono es un cuadrilátero", no necesariamente es verdadero; puede ser un triángulo.

(*b*) La proposición es verdadera. Su converso "un ángulo con tamaño mayor que el de un ángulo recto es un ángulo obtuso", no es necesariamente cierto; puede ser un ángulo derecho.

(*c*) La proposición es verdadera. Su converso "un estado de la Unión Americana es Florida", no es necesariamente cierto; puede ser cualquier otro de los 49 estados de la Unión.

(*d*) La proposición es verdadera. Su converso "si soy su maestro entonces usted es mi alumno", también es cierto.

(*e*) La proposición, de hecho una definición, es verdadera. Su converso, "un triángulo que tiene todos sus lados congruentes es un triángulo equilátero" también es cierto.

2.5 DEMOSTRACIÓN DE UN TEOREMA

Un teorema debe demostrarse utilizando el procedimento siguiente paso a paso. La forma de la demostración se muestra en el ejemplo que sigue al procedimiento. Nótese que pueden utilizarse símbolos y abreviaturas aceptados.

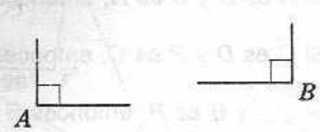
1. Divida el teorema en sus hipótesis (lo conocido) y conclusión (lo que se va a demostrar). Subraye la hipótesis con una sola línea y la conclusión con una línea doble.
2. Haga un diagrama en el que se incluyan símbolos y marcas de guía. Por ejemplo, esquinas rectas para simbolizar ángulos rectos, marcas para indicar partes iguales y símbolos de interrogación para las partes que es necesario demostrar que son iguales.
3. Junto al diagrama escriba que es lo que se conoce y lo que se va a demostrar. Los "Dado" y los "Demuéstrese" deben hacer referencia a partes del diagrama.
4. Elabore un plan. Aunque no es esencial, el tener un plan es muy aconsejable. Debe incluir los principales métodos de demostración a utilizar.
5. A la izquierda, indique todas las proposiciones en pasos numerados en forma progresiva. La última proposición debe ser la que se requiere demostrar. Todas las proposiciones deben referirse a partes del diagrama.
6. A la derecha, junto a cada proposición, dé una razón para cada una de ellas. Las razones aceptables en una demostración son los hechos conocidos: las definiciones, los postulados, otros teoremas dados como ciertos y teoremas demostrados con anterioridad.

Paso 1: **Demostrar:** Todos los ángulos rectos son iguales en tamaño.

Paso 2: **Dado:** $\angle A$ y $\angle B$ son $\angle$ rectos

Paso 3: **Demuéstrese:** $m\angle A = m\angle B$

Paso 4: **Plan:** Dado que cada ángulo es igual a 90°, los ángulos son iguales en tamaño, usando el Post. 1: objetos iguales a sí mismos son iguales entre sí.



Pasos 5
y 6:

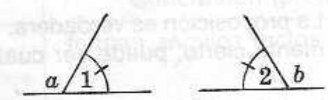
Proposición	Razones
1. $\angle A$ y $\angle B$ son $\angle$s rectos 2. $m\angle A$ y $m\angle B$ cada uno = 90° 3. $m\angle A = m\angle B$	1. Dado 2. $m(\angle$ recto) = 90° 3. Objetos = a sí mismos = entre sí

PROBLEMAS RESUELTOS

2.14 Demostración de un Teorema

Utilice el procedimiento anterior para demostrar que los ángulos suplementarios de ángulos de igual medida tiene igual medida.

Paso 1: **Demuéstrese:** Los suplementos de ángulos de igual medida tienen igual medida.



Paso 2: **Dado:** $\angle a$ supl. $\angle 1$, $\angle b$ supl. $\angle 2$
$m\angle 1 = m\angle 2$

Paso 3: **Demuéstrese:** $m\angle a = m\angle b$

Paso 4: **Plan:** al usar el Post. de sustracción, las medidas de ángulos iguales pueden restarse de las sumas iguales de las medidas de pares de ángulos suplementarios. Los residuos restantes son las medidas de los ángulos suplementarios.

Pasos 5
y 6:

Proposiciones	Argumentos
1. $\angle a$ supl. $\angle 1$, $\angle b$ supl. $\angle 2$	1. Dado
2. $m\angle a + m\angle 1 = 180°$ $m\angle b + m\angle 2 = 180°$	2. $\angle$s supl. son ángulos cuya suma tiene una medida = 180°
3. $m\angle a + m\angle 1 = m\angle b + m\angle 2$	3. Objetos = a sí mismos = entre sí
4. $m\angle 1 = m\angle 2$	4. Dado
5. $m\angle a = m\angle b$	5. Si = s se restan de = s sus diferencias son = s.

Problemas complementarios

1. Complétese cada proposición. En los incisos (*a*)-(*e*) cada letra como *C*, *D* o *R* representa un conjunto o grupo (2.

(*a*) Si *A* es *B* y *B* es *H*, entonces ___?___. A = H

(*b*) Si *C* es *D* y *P* es *C*, entonces ___?___. C = D P = C D = D

(*c*) Si ___?___ y *B* es *R*, entonces *B* es *S*. S R

(*d*) Si *E* es *F*, *F* es *G*, y *G* es *K*, entonces ___?___.

(*e*) Si *G* es *H*, *H* es *R* y ___?___, entonces *A* es *R*.

(*f*) Si los triángulos son polígonos y los polígonos son figuras geométricas, entonces __?__.

(*g*) Si un rectángulo es un paralelogramo y un paralelogramo es un cuadrilátero, entonces __?__.

2. Establézcanse las conclusiones que siguen a la aplicación del postulado 1, a la información que se da y que hace referencia a la figura 2-29. (2.3)

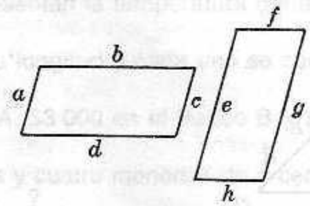


Fig. 2-29

(*a*) $a = 7, c = 7, f = 7$

(*b*) $b = 15, b = g$

(*c*) $f = h, h = a$

(*d*) $a = c, c = f, f = h$

(*e*) $b = d, d = g, g = e$

3. Establézcanse las conclusiones que se obtienen cuando se aplica el postulado 2, a los casos siguientes. (2.4)

(*a*) Evalúese $a^2 + 3a$ cuando $a = 10$.

(*b*) Evalúese $x^2 - 4y$, cuando $x = 4$ y $y = 3$.

(*c*) ¿Es cierto que: $b^2 - 8 = 17$ cuando $b = 5$?

(*d*) Encuéntrese x si $x + y = 20$, y si $y = x + 3$.

(*e*) Encuéntrese y si $x + y = 20$, y si $y = 3x$.

(*f*) Encuéntrese x si $5x - 2y = 24$; y si $y = 3$.

(*g*) Encuéntrese x si $x^2 + 3y = 45$; y si $y = 3$.

4. Establézcanse las conclusiones que se obtienen cuando el postulado 3 se aplica a los datos de la figura 2-30 (*a*) y (*b*). (2.5)

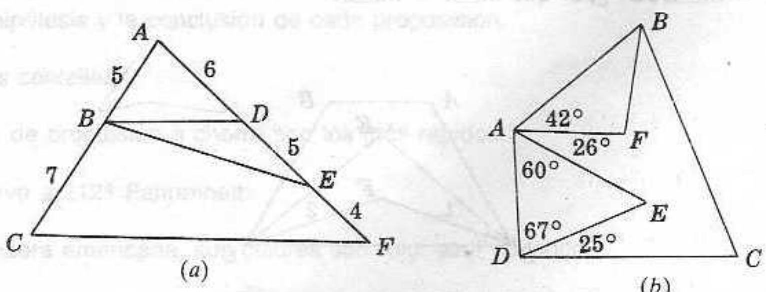


Fig. 2-30

5. Establézcase una conclusión que incluya a dos nuevos iguales cuando se apliquen los postulados 4, 5 o 6 a lo datos que se dan a continuación. (2.6

(*a*) Dado: $b = e$ (Fig. 2-31).

(*b*) Dado: $b = c$, $a = d$ (Fig. 2-31).

(*c*) Dado: $\angle 4 \cong \angle 5$ (Fig. 2-32).

(*d*) Dado: $\angle 1 \cong \angle 3$, $\angle 2 \cong \angle 4$ (Fig.2-32).

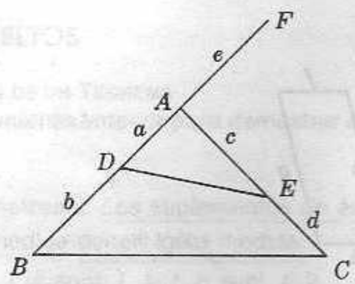


Fig. 2-31

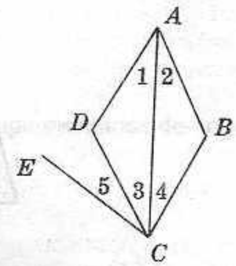


Fig. 2-32

6. En la figura 2-33 $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ están trisectados. (2.

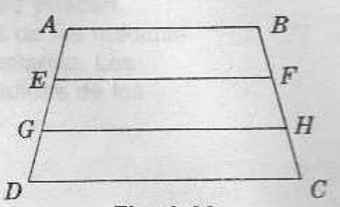


Fig. 2-33

(*a*) Si $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, ¿por qué $\overline{AE} \cong \overline{BF}$?

(*b*) Si $\overline{EG} \cong \overline{FH}$, ¿por qué $\overline{AG} \cong \overline{BH}$?

(*c*) Si $\overline{GD} \cong \overline{HC}$, ¿por qué $\overline{AD} \cong \overline{BC}$?

(*d*) Si $\overline{ED} \cong \overline{FC}$, ¿por qué $\overline{EG} \cong \overline{FH}$?

7. En la figura 2-34 $\angle BCD$ y $\angle ADC$ están trisectados.

(*a*) Si $m\angle BCD = m\angle ADC$, ¿por qué $m\angle FCD = m\angle FDC$?

(*b*) Si $m\angle 1 = m\angle 2$, ¿por qué $m\angle BCD = m\angle ADC$?

(*c*) Si $m\angle 1 = m\angle 2$, ¿por qué $m\angle ADF = m\angle BCF$?

(*d*) Si $m\angle EDC = m\angle ECD$, ¿por qué $m\angle 1 = m\angle 2$?

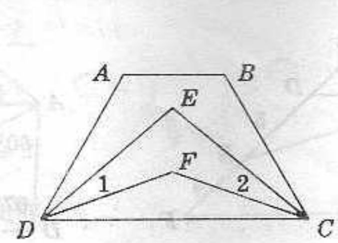


Fig. 2-34

8. Complétense las siguientes proposiciones y dígase qué postulado se aplica. (2.8)

(*a*) Si Bill y Dick ganan la misma cantidad de dinero por hora y su salario se incrementa en la misma cantidad, entonces _?_.

(*b*) Durante este año ciertas acciones han triplicado su valor. Si el año pasado tenían el mismo valor, entonces _?_.

(*c*) Dos grupos en la escuela tenían el mismo número de alumnos hace una semana. Si ha desertado el mismo número de estudiantes en cada grupo, entonces _?_.

(*d*) Dado que 100°C y 212°F representan la temperatura del agua en ebullición, entonces _?_.

(*e*) Si dos tablones tienen la misma longitud y cada uno se corta en cuatro partes iguales, entonces _?_.

(*f*) Si él tiene $2 000 en el Banco A, $3 000 en el Banco B y $5 000 en el Banco C, entonces _?_.

(*g*) Si tres monedas de 25 centavos y cuatro monedas de 5 centavos se comparan con tres monedas de 25 y dos monedas de 10 centavos, _?_.

9. Dar respuesta a cada una de las siguientes preguntas e indicar el teorema básico sobre ángulos que se requieren. Todas las preguntas se refieren a la figura 2-35. (2.10)

(*a*) ¿Por qué $m\angle 1 = m\angle 2$?

(*b*) ¿Por qué $m\angle DBC = m\angle ECB$?

(*c*) Si $m\angle 3 = m\angle 4$, ¿por qué $m\angle 5 = m\angle 6$?

(*d*) Si $\overrightarrow{AF} \perp \overline{DE}$ y $\overrightarrow{GC} \perp \overline{DE}$, ¿por qué $m\angle 7 = m\angle 8$?

(*e*) Si $\overrightarrow{AF} \perp \overline{DE}$, $\overrightarrow{GC} \perp \overline{DE}$ y $m\angle 11 = m\angle 12$, ¿por qué $m\angle 9 = m\angle 10$?

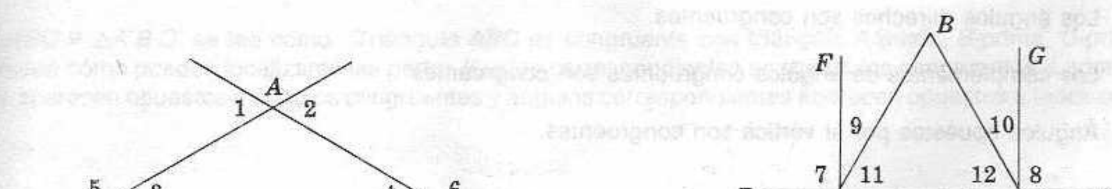


Fig. 2-35

10. Determínense la hipótesis y la conclusión de cada proposición. (2.11 y 2.12)

(*a*) Las estrellas centellean.

(*b*) Los aviones de propulsión a chorro son los más rápidos.

(*c*) El agua hierve a 212° Fahrenheit.

(*d*) Si es la bandera americana, sus colores son rojo, azul y blanco.

(*e*) Usted no aprenderá geometría si no hace la tarea sobre el tema.

(*f*) Un bateador va a la primera base si el árbitro marca la cuarta bola mala.

(*g*) Si A es el hermano de B y C es el hijo de B, entonces A es el tío de C.

(*h*) Una bisectriz divide el ángulo en dos partes iguales.

(*i*) Un segmento está trisectado si está dividido en tres partes congruentes.

(*j*) Un pentágono tiene cinco lados y cinco ángulos.

(*k*) Algunos rectángulos son cuadrados.

(*l*) Los ángulos no se hacen más grandes si sus lados se hacen más largos.

(*m*) Los ángulos que son congruentes y suplementarios, son ángulos rectos.

(*n*) La figura no es un polígono si uno de sus lados no es un segmento de línea recta.

11. Exprésese el converso de cada una de las siguientes proposiciones verdaderas y establézcase si es necesariamente verdadero. (2.13

(*a*) La mitad de un ángulo recto es un ángulo agudo.

(*b*) Un triángulo obtuso es un triángulo con un ángulo obtuso.

(*c*) Si el árbitro marcó el tercer *strike*, entonces el bateador está fuera de juego.

(*d*) Si soy más alto que tú, entonces eres más corto que yo.

(*e*) Si soy más pesado que tú, entonces nuestros pesos son distintos.

12. Demuéstrese lo siguiente. (2.1

(*a*) Los ángulos derechos son congruentes.

(*b*) Los complementos de ángulos congruentes son congruentes.

(*c*) Ángulos opuestos por el vértice son congruentes.